



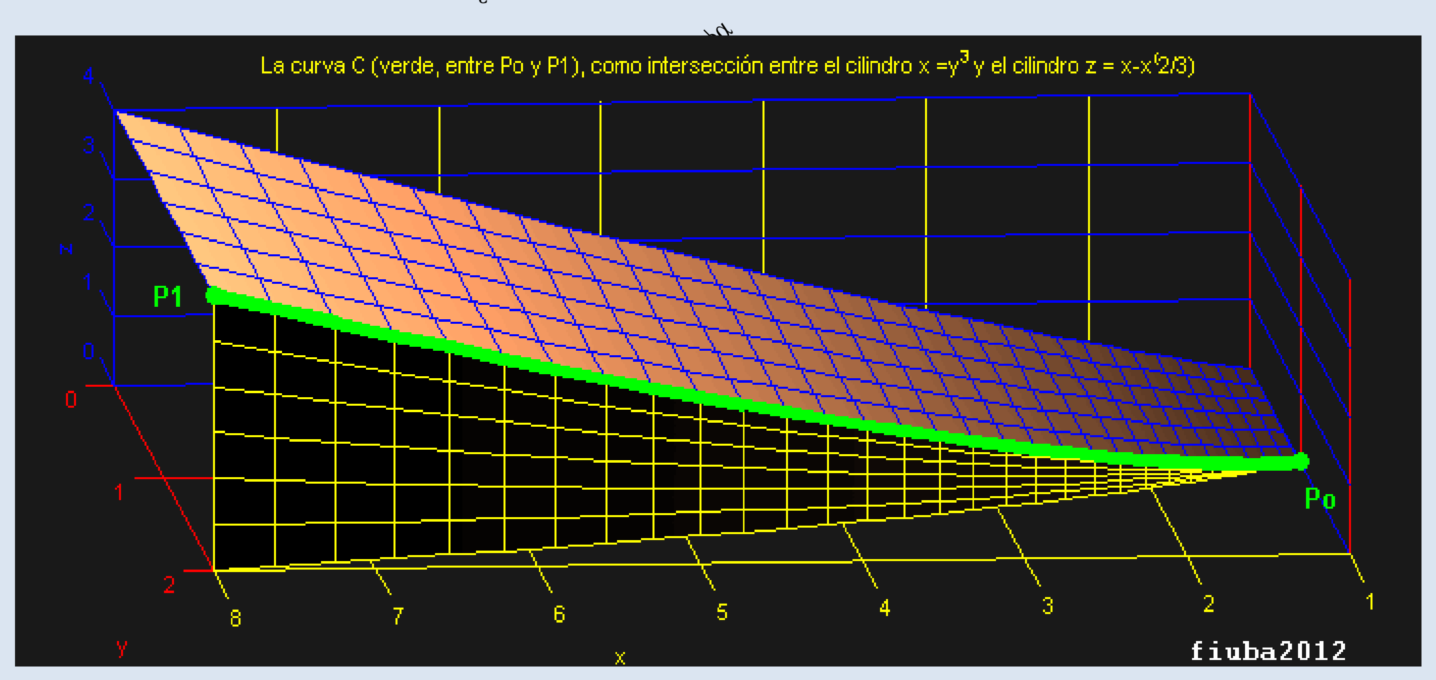
Ejercicio 1. Dada la familia de curvas ($k\in\mathbb{R}$) $y = k\,(x+1)^2 - 1$, determinar una curva de su familia de trayectorias cuya área encerrada sea $3\sqrt{2}\pi$.

La ecuación diferencial de la familia original se obtiene eliminando k entre las ecuaciones $y = k\,(x+1)^2 - 1$, $y' = 2k\,(x+1)$, de donde queda $(x+1)\,dy = 2\,(y+1)\,dx$. Entonces, teniendo en cuenta la condición de ortogonalidad, la ecuación diferencial de sus trayectorias ortogonales es $(x+1)\,dx + 2\,(y+1)\,dy = 0$ [aquí se sobrentiende conocido el significado de $y\,y' = -1$], cuya solución es inmediata si se observa que es una diferencial total exacta, esto es $d[\,½\,(x+1)^2 + (y+1)^2] = 0$, de modo que las trayectorias ortogonales son elipses (con β cualquier real positivo) de ecuación $½\,(x+1)^2 + (y+1)^2 = \beta^2$, centradas en $P_0 = (-1, -1)$ y con semiejes $a = \sqrt{2}\beta$, $b = \beta$. Dado que el área encerrada por una cualquiera de estas elipses es πab, basta tomar $\beta = \sqrt{3}$, resultando entonces la elipse $(x+1)^2/6 + (y+1)^2/3 = 1$.

Observación. Puede aprenderse rehaciendo el ejercicio –generalizándolo– para tener el resultado de que las trayectorias ortogonales a una familia del tipo $y = k\,x^n$ ($n = 1, 2, \ldots$) observando que siempre se trata de una familia de elipses centrada en el origen de coordenadas (en general, en el vértice de la familia de parábolas) con una relación de semiejes $a/b = \sqrt{n}$. Un caso extremo se tiene con $n = 1$, resultando, como es evidente, que las trayectorias ortogonales a una familia de rectas que pasa por un punto es una familia de circunferencias centradas en ese punto. Graficar para $n = 10$ y $n = 100$ permite 'ver' mucho.

Ejercicio 2. Sea C a curva intersección entre las superficies de ecuación $z = x - y^2$, $x = y^3$, y sean $P_0 = (1, y_0, z_0)$, $P_1 = (8, y_1, z_1)$ dos puntos de C. Sea g: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar $C^2(\mathbb{R}^3)$ que verifica $g(P_0) = g(P_1)$. Calcular la circulación desde P_0 a P_1 a lo largo de C del campo vectorial $\bar{f}(x, y, z) = (xy + 2g_x(x, y, z), ½\,x^2 + 2g_y(x, y, z), 2g_z(x, y, z))$.

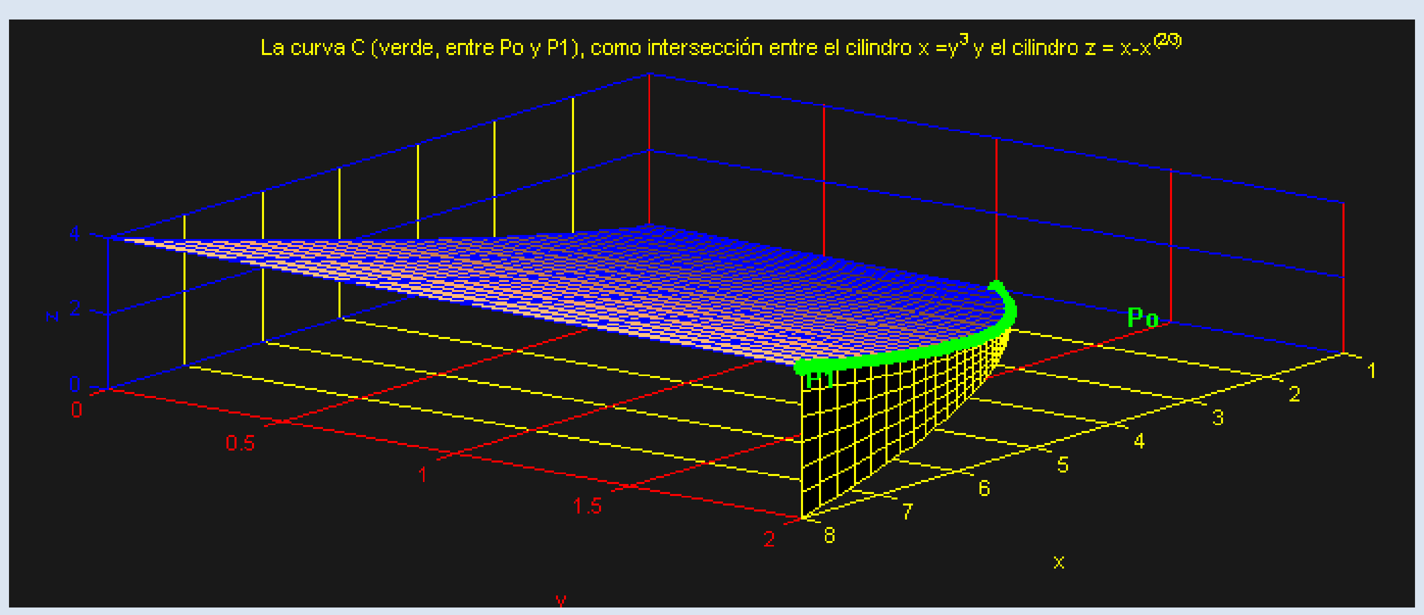
El campo vectorial $\bar{f}$ es de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$, pues g es $C^2(\mathbb{R}^3)$; además, es irrotacional [efectuar el cálculo para ver que $\bar{\nabla} \times \bar{f} = \bar{0}$, en ese cálculo observar que aplica el teorema de Schwarz al campo escalar g] en el abierto simplemente conexo $\mathbb{R}^3$, de modo que es un campo conservativo y entonces admite una función potencial φ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x, y, z) = ½\,x^2 y + 2g(x, y, z)$ que es también $C^2(\mathbb{R}^3)$. Ahora, el teorema fundamental del cálculo permite escribir $\int_C \bar{f}\cdot d\bar{l} = \varphi(P_1) - \varphi(P_0) = ½\,y_1 + 2g(P_1) - (½\,y_0 + 2g(P_0))$, y considerando que $g(P_0) = g(P_1)$ queda $\int_C \bar{f}\cdot d\bar{l} = ½\,(y_1 - y_0)$. Dado que los puntos P_0 y P_1 están en C, debe ser $y_0 = 1$, $y_1 = 2$ [pues $y_0^3 = 1$, $y_1^3 = 8$], de modo que, finalmente, $\int_C \bar{f}\cdot d\bar{l} = ½\,(2-1) = ½$.



Observación 1. No resultó necesario conocer las componentes z_0 y z_1, aunque es inmediato que pueden calcularse; de hecho, se tiene que $P_0 = (1, 1, 0)$, $P_1 = (8, 2, 4)$.

Observación 2. La curva C no interviene en el cálculo mismo, pero sí su naturaleza es importante en la aplicación del teorema fundamental del cálculo. Es claro que C puede parametrizarse de modo regular con una función vectorial inyectiva, como puede ser $\bar{\gamma}$: $[1, 2] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{\gamma}(t) = (t^3, t, t^3 - t^2)$. Se observa que $\bar{\gamma}$ es $C^1([1, 2])$, con $\bar{\gamma}'(t) = (3t^3, 1, 3t^2 - 2t)$ nunca nula en [1, 2] y además es una curva simple $\forall t_1, t_2$ en [1, 2]: $\bar{\gamma}(t_1) = \bar{\gamma}(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$.





Ejercicio 3. Sea $\bar{f}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial $\bar{f}(x, y) = (ax - b^2y, a^2x + by)$. Hallar ($a$, b) sobre la circunferencia centrada en (3, 0) de radio 3 tal que resulte mínima la circulación del campo $\bar{f}$ a lo largo de la frontera del paralelogramo de vértices (0, 0), (1, 0), (2, 1), (1,1), orientada positivamente.

Llamando al paralelogramo D $\overset{\text{def}}{=}$ {(x, y)∈ $\mathbb{R}^2$: 0 ≤ y ≤ 1, y ≤ x ≤ y+1} y observando que $\bar{f}$ es C^∞($\mathbb{R}^2$), se aplica de modo inmediato el teorema de Green [enunciarlo, verificar que sus hipótesis se cumplen aquí], de modo que la circulación pedida puede calcularse integrando en D la función $Q_x(x,y) - P_y(x,y) = a^2 + b^2$ siendo $P(x,y) = ax - b^2y, Q(x,y) = a^2x + by$ las componentes escalares del campo vectorial. Entonces $\int_C \bar{f} \cdot \overline{dl} = \iint_D [Q_x(x,y) - P_y(x,y)]\, dx\, dy = \iint_D (a^2 + b^2) dxdy = (a^2 + b^2)\ área(D)$ = $(a^2 + b^2)$. Ahora el problema es hallar el mínimo de esta función g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(a, b) = a^2 + b^2$, restringida a la circunferencia de ecuación $(a-3)^2 + b^2 = 9$, lo que puede hacerse de muchas maneras. Una de ellas consiste en extremar la función de una variable $h(t) \overset{\text{def}}{=} g(\bar{\gamma}(t))$, siendo $\bar{\gamma}$ una parametrización de la circunferencia $\bar{\gamma}$: [0, 2π)→ $\mathbb{R}^2$ tal que $\bar{\gamma}(t)$ = (3 + 3 cos(t), 3 sin(t)). Es claro que esta función $h(t)$ = 6 (3 + 3 cos(t)) (¡continua!) debe alcanzar sus extremos en el compacto [0, 2π], lo que sin necesidad del cálculo se da en $t_o = \pi$, de modo que el punto de la circunferencia en que se alcanza el mínimo es $P_0 = \bar{\gamma}(t_0)$ = (0, 0).

Observación 1. El valor mínimo de la circulación es 0. El resultado pudo haberse deducido sin cálculo alguno, pues $g(a, b) = a^2 + b^2$ alcanza el valor 0 en (solamente) (0, 0), que es un punto de la circunferencia sobre la que se debe buscar el mínimo; el valor máximo (no pedido por el enunciado) se alcanza en (6, 0) y es 36 (¿por qué?).

Ejercicio 4. Sea la superficie S = {(x, y, z)∈ $\mathbb{R}^3$: $x^2 + z^2 = 9$, 0 ≤ y ≤ 2, x ≥ 0, z ≥ 0} orientada con campo de normales de tercera componente negativa, y sea el campo vectorial $\bar{f}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f}$(x, y, z) = (x^2, 3xy, b). Calcular b∈ $\mathbb{R}$ tal que el flujo de $\bar{f}$ a través de S sea igual al área de S.

Puede hacerse el cilindro S = $\bar{T}(\mathcal{R})$, siendo $\mathcal{R} \overset{\text{def}}{=}$ [0, π/2) × [0, 2] con la parametrización $\bar{T}$: $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{T}$(u, v) = (3 cos(u), v, 3 sin(u)), cuyo campo de normales está dado por el producto vectorial fundamental $\bar{N}(u, v) = \bar{T}_u(u, v) \times \bar{T}_v(u, v)$ = −3(cos(u), 0, sin(u))[1]. Puede observarse que la parametrización introduce la orientación pedida por el enunciado, luego el flujo es:

$$\iint_S \bar{f} \cdot \breve{n}\, dS = \iint_{\mathcal{R}} \bar{f}\big(\bar{T}(u,v)\big) \cdot \bar{N}(u,v) du\, dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^2 (9\cos^2(u), 9\cos(u)\, v, b) \cdot (-3\cos(u), 0, -3\sin(u)) dv$$

$$= -6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (9\cos^3(u) + b\sin(u)) du = -6(6 + b)$$

En cuanto al área de la porción de cilindro es (3π/2) 2 = 3π. Luego b es el valor que resulta de igualar estos dos resultados, esto es b = −π/2 − 6.

[1] Es inmediato que esta parametrización es $C^\infty(\mathcal{R})$, y con normal nunca nula de modo que se trata de una parametrización regular en todas partes en $\mathcal{R}$. Por otra parte, la parametrización es inyectiva en todo su dominio.

Ejercicio 5. Sea M = $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2 + z^2 \le 4,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 9\}$. Determinar el flujo saliente a través de la frontera de M del campo vectorial $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f}(x, y, z) = (2xz, 2y - x e^{-z}, y - z^2)$.

El campo vectorial es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, y también lo es su divergencia: $\bar{\nabla} \cdot \bar{f}(x, y, z) = 2$. Siendo S = ∂M con orientación saliente, se aplica directamente el teorema de Gauss [enunciarlo y asegurarse de que se cumplen aquí las hipótesis], de modo que el flujo pedido es $\iint_S \bar{f} \cdot \check{n}\, dS = \iiint_M div(\bar{f}) dV = 2 \iiint_M dV$ el doble del volumen del macizo M. Para su cálculo, resultan sencillas las coordenadas cilíndricas (r, θ, y), con x = r cos(θ), z = r sin(θ), y = y, con jacobiano J(r, θ, y) = r, de modo que se tiene entonces que

$$\iint_S \bar{f} \cdot \check{n}\, dS = 2 \iiint_M dV = 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 dr \int_0^{\sqrt{9-r^2}} r\, dy = 8\pi \int_1^2 \sqrt{9 - r^2}\, r dr = \frac{8}{3}\pi\left(8\sqrt{8} - 5\sqrt{5}\right)$$

